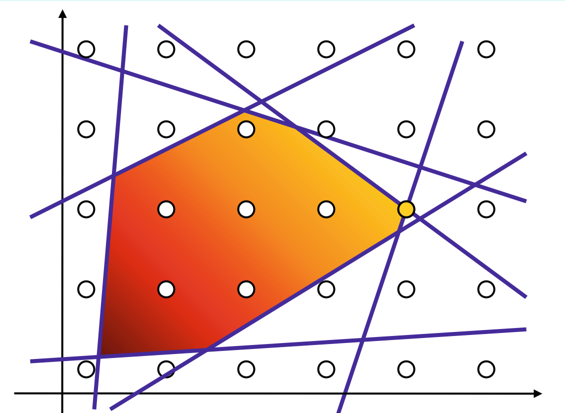
BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

2019 Tag der Mathematik

24. Berliner Tag der Mathematik

Samstag, 11. Mai 2019

9.00 - 18.30 Uhr


Grafik: Armin Fügenschuh

Campus der Beuth Hochschule

Aufgaben und Lösungen

Beuth Hochschule für Technik Berlin
Luxemburger Straße 10 ■ 13353 Berlin
www.tdm.berlin

Team Nr.

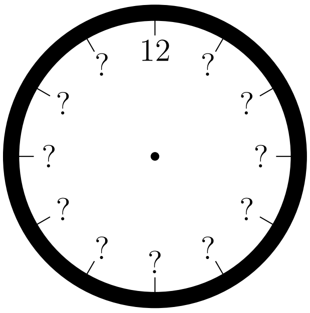
nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 1: Meister Horas Uhr (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 1 Punkt, (b) : 2 Punkte, (c) : 5 Punkte, (d) : 2 Punkte)



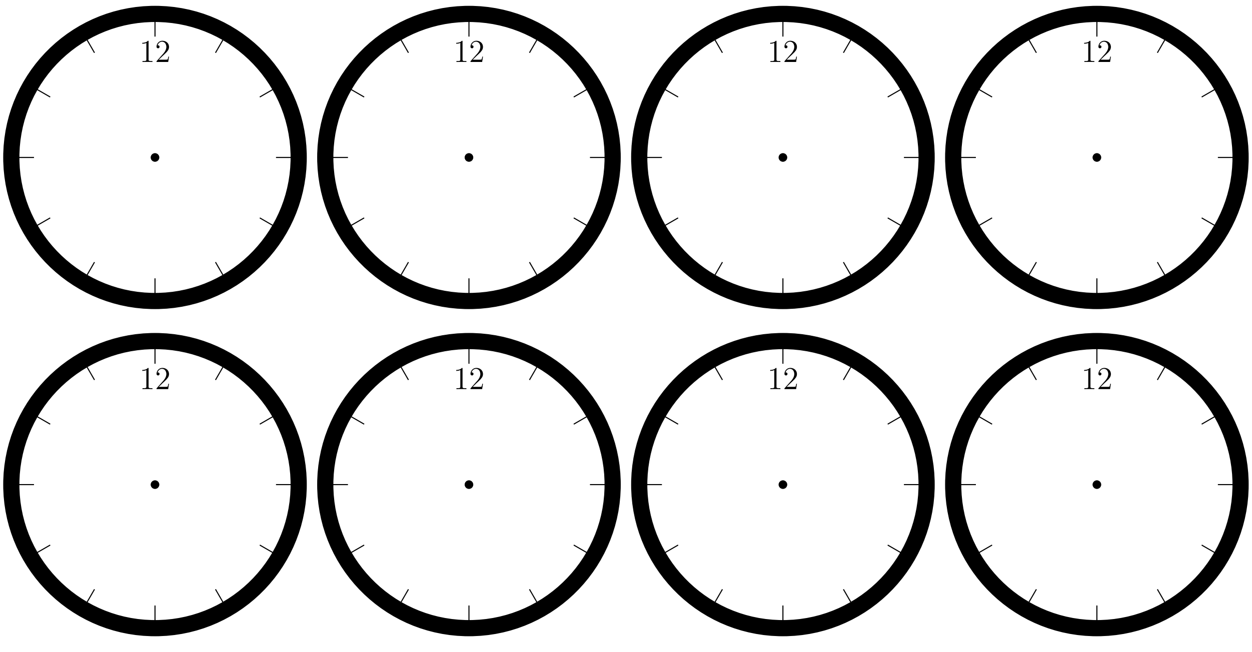
Meister Hora hat eine kuriose Uhr: Bei dieser springt der Stundenzeiger nicht wie üblich jede Stunde um 30°, sondern um 150° im Uhrzeigersinn.

(a) Wie muss das Ziffernblatt aussehen, wenn man trotzdem die Stunden von „1“ bis „12“ ablesen können soll? Dabei soll die „12“ immer oben sein.

(b) Gebt noch zwei andere Winkel als 30° und 150° an, bei denen auch jede Stunde an einer eindeutigen Stelle abgelesen werden kann (und bei denen der Stundenzeiger auch nach genau 12 Stunden wieder am selben Platz ist).

(c) Begründet, dass es außer den genannten und den von euch gefundenen Uhren keine weiteren Uhren gibt, die die in Teilaufgabe (b) genannten Eigenschaften haben.
(Tipp: Betrachtet Winkel als Bruchteile von 360°, also $30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$, $150° = \frac{5}{12} \cdot 360°$ usw.)

(d) Erreicht der Stundenzeiger immer irgendwann wieder die Ausgangsstellung, wenn er jede Stunde um einen Winkel $\frac{p}{q} \cdot 360°$ springt? Dabei ist $\frac{p}{q}$ ein beliebiger Bruch.
Begründet eure Antwort.



Benutzt für die Lösung auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte
Unterschrift

Aufgabe 2: Lügen und Geheimnistuerei (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a): 4 Punkte, (b): 6 Punkte)

(a) Vier Kinder spielen mit einem Ball, dabei geht aus Versehen ein Fenster zu Bruch. Sascha sagt, dass Felix Schuld hat, Felix sagt, dass es Yuri war. Yuri meint, dass er nicht weiß, wer es gewesen sein könnte. Auch Stefan sagt, dass er nicht weiß, wer es gewesen sein könnte.

Wir wissen, dass nur das Kind, welches das Fenster kaputtgemacht hat, *nicht* die Wahrheit sagt. Wer hat dann das Fenster kaputt gemacht?

Begründet eure Antwort.

(b) Yuri und Felix wollen Saschas Geburtstag erraten. Sascha gibt ihnen zehn Termine an, von denen es genau einer ist:

- 8. März, 11. März;
- 8. April, 21. April, 29. April;
- 21. Mai, 23. Mai;
- 12. Juni, 23. Juni, 29. Juni.

Dann flüstert er Yuri den korrekten Monat zu, Felix den korrekten Tag eines Monats (ohne den Monat zu nennen), und er verrät beiden, dass er Yuri den Monat und Felix den Tag gesagt hat.

Daraufhin sagt Yuri: „Ich kenne Saschas Geburtstag nicht, aber ich weiß, dass Felix ihn ebenfalls nicht kennt.“

Felix antwortet: „Stimmt. Doch nun kenne ich Saschas Geburtstag!“

Schließlich sagt Yuri: „Wirklich? Gut, dann kenne ich Saschas Geburtstag nun auch.“

Wann hat Sascha Geburtstag? Begründet eure Antwort.

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

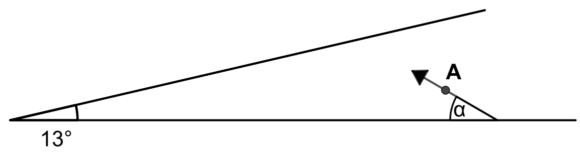
Unterschrift

Aufgabe 3: Dreikampf im Mathebillard (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 5 Punkte, (b) : 3 Punkte, (c) : 2 Punkte)

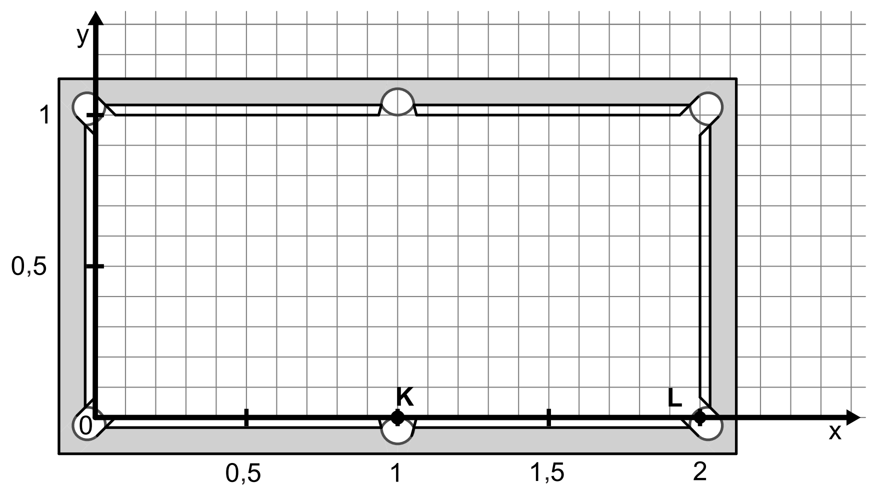
Beim Dreikampf im Mathebillard müssen Trickschüsse nach bestimmten Vorgaben ausgeführt werden.

(a) Die erste Disziplin des Mathebillards findet auf einem etwas ungewöhnlichen Billardtisch statt, bei dem zwei Banden einen Winkel von 13° bilden. Vom Punkt A aus (s. Zeichnung) soll die Kugel so in Richtung der oberen Bande gestoßen werden, dass sie zwischen den Banden hin und her reflektiert wird und nach genau fünf Bandenberührungen wieder auf demselben Weg zu A zurück rollt. Ermittelt, wie groß der Winkel α sein muss.



(b) Bei der zweiten Disziplin wird ein normaler rechteckiger Billardtisch verwendet, wie er auf dem Bild unten aus der Vogelperspektive zu sehen ist. Die Kugel, die im Punkt K (mit den Koordinaten $(1|0)$) liegt, kann über verschiedene Wege exakt zum Punkt L (mit den Koordinaten $(2|0)$) gespielt werden – zum Beispiel über eine Bande, indem man den Randpunkt mit den Koordinaten $(1{,}5 \mid 1)$ anspielt. Findet eine Möglichkeit, wie die Kugel über *zwei* Banden ins Loch gebracht werden kann. Gebt die Koordinaten des Punktes an der Bande an, der als erstes angespielt werden muss. Begründet, warum die Kugel so im Loch landet.

(c) Bei der dritten Disziplin wird wieder der rechteckige Tisch aus (b) verwendet. Dieses Mal soll die Kugel jedoch über *drei* Banden von K aus zum Punkt L gestoßen werden. Findet hierfür zwei verschiedene Möglichkeiten. Gebt jeweils wieder die Koordinaten der anzuspielenden Punkte an der Bande an.



Benutzt für die Lösung die Rückseite und das folgende Blatt.

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte
Unterschrift

Aufgabe 4: Drei Nim-Spiele (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 3 Punkte, (b) : 2 Punkte, (c) : 5 Punkte)

Arzu und Berfin spielen ein Spiel. Von einem Haufen mit anfangs 20 Spielsteinen nehmen beide abwechselnd einen, zwei oder drei Steine weg.
Siegerin ist, wer den letzten Stein wegnimmt.
(Der letzte Stein muss nicht einzeln liegen, um genommen werden zu können.
Sind z.B. noch drei Steine übrig und Arzu nimmt diese drei, ist sie Siegerin.)

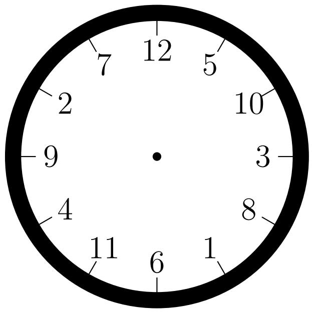
a) Arzu beginnt das Spiel. Zeige, dass Berfin stets so spielen kann, dass sie den letzten Stein nimmt und gewinnt.

b) Weil Arzu sauer ist, dass sie verloren hat, ändern beide jetzt die Spielregeln. Jetzt ist diejenige, die den letzten Stein nehmen muss, die Verliererin. Arzu beginnt erneut mit 20 Steinen. Gib eine Strategie an, wie Arzu spielen muss, um garantiert zu gewinnen.

c) Jetzt schlägt Berfin eine neue Regel vor. Wieder soll Arzu beginnen und Gewinnerin ist, wer den letzten Stein nimmt. Sie spielen wieder mit einem Haufen von 20 Steinen, aber Berfin darf ihn vor Arzus erstem Zug in zwei einzelne Haufen mit je mindestens einem Stein teilen. Jetzt nehmen beide wieder abwechselnd Steine, aber sie dürfen nur von *einem* Haufen genommen werden. Von welchem ist dabei egal und man kann auch wechseln. Wie sollte Berfin die 20 Steine aufteilen, damit sie garantiert gewinnen kann? Gib alle Möglichkeiten an.

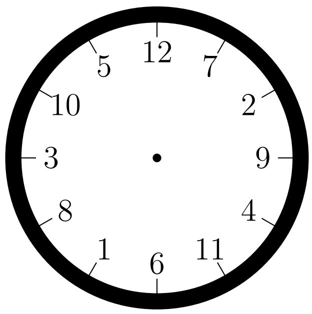
   Beispiel: Berfin teilt die 20 Steine in zwei Haufen zu 5 und 15 Steinen. Dann nimmt Arzu in ihrem ersten Zug 3 Steine von dem kleineren Haufen, der danach nur noch aus 2 Steinen besteht. Berfin könnte jetzt von dem kleineren Haufen 1 oder 2 Steine nehmen, denn mehr sind nicht da. Oder sie könnte von dem größeren Haufen wie üblich 1, 2 oder 3 wegnehmen.

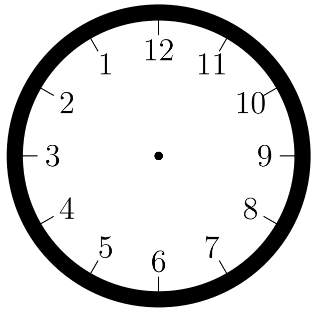
(a) Das Ziffernblatt muss wie folgt aussehen: **(1)**



(b) Die beiden gesuchten Winkel, die die genannten Eigenschaften haben, lauten 210° und 330°. **(2)**
Die so entstehenden Uhren ergeben sich jeweils aus dem Ziffernblatt von Meister Horas Uhr bzw. der normalen Uhr durch Spiegelung an der vertikalen Achse. Denn es gilt:

210°	=	360°-150°	(gespiegelte Uhr von Meister Hora)
330°	=	360°-30°	(gespiegelte normale Uhr)





(c) Zum Einen soll die Uhr nach zwölf Stunden wieder in der Ausgangsstellung sein, sodass der Winkel ein Vielfaches von $\frac{1}{12} \cdot 360°$ sein muss. **(1)**
Es kommen also zunächst die Winkel $\frac{1}{12} \cdot 360°$, $\frac{2}{12} \cdot 360°$, $\frac{3}{12} \cdot 360°$, …infrage. Da allerdings ein Sprung des Zeigers $\frac{1}{12} \cdot 360°$ dasselbe Ergebnis liefert wie ein Sprung um $\frac{13}{12} \cdot 360°$, $\frac{25}{12} \cdot 360°$, … (der Zeiger dreht sich nur ein paar Runden mehr) und ein Sprung um $\frac{p}{12} \cdot 360°$ dasselbe Ergebnis liefert wie ein Sprung um $\frac{p+12}{12} \cdot 360°$, ist es nur nötig die Winkel $\frac{1}{12} \cdot 360°$, $\frac{2}{12} \cdot 360°$, …, $\frac{11}{12} \cdot 360°$ zu betrachten.
(inklusive Begründung) **(1)**
Es sei nun $\alpha = \frac{p}{12} \cdot 360°$ einer der zu betrachtenden Sprungwinkel. Unter den Vielfachen des Spungwinkels $1 \cdot \alpha, 2 \cdot \alpha, ..., 12 \cdot \alpha$ darf nur $12 \cdot \alpha$ wieder ein Vielfaches von 360° sein. Das ist nicht der Fall, wenn der gekürzte Bruch nicht mehr den Nenner 12 hat. **(1)**
Also bei:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

(1)

Ist der Nenner nämlich 2, 3, 4 oder 6, so wird schon nach 2, 3, 4 bzw. 6 Stunden wieder die Ausgangsstellung erreicht. Nur $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ lassen sich nicht mehr kürzen, sodass 30°, 150°, 210° und 330° die einzigen möglichen Winkel sind. Und diese erfüllen die Forderungen, wie wir schon gesehen haben. **(1)**

(d) Springt die Uhr jede Stunde um einen beliebigen Bruch $\frac{p}{q}$ multipliziert mit 360°, so erreicht sie immer irgendwann ihre Ausgangsstellung. **(1)**
Spätestens nach q Stunden (der Nenner des Bruchs) hat sie nämlich ein Vielfaches von 360° zurückgelegt. **(1)**

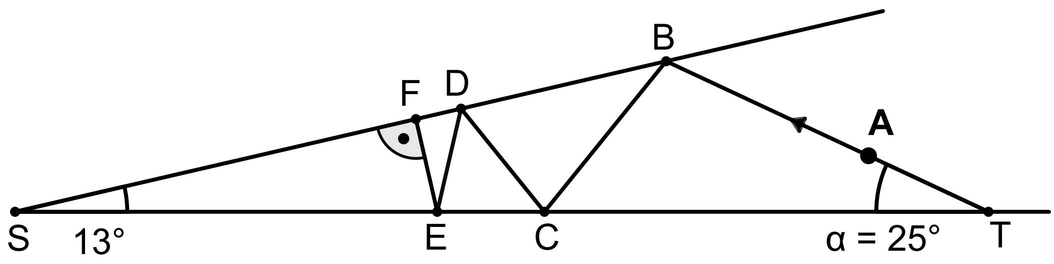
Bepunktungsvorschlag: Siehe oben in Klammern.

(a)
- Felix war es. **(1)**
- Sascha meinte dies und er würde lügen, wenn es Felix nicht gewesen wäre. **(1)**
- Aber Felix gab Yuri die Schuld. Hätte Felix recht, so hätten sowohl Sascha als auch Yuri gelogen. Folglich kann Felix nicht die Wahrheit sagen. **(1)**
- Da Felix damit der Lüge überführt ist, haben alle anderen drei Kinder recht, was auch nicht im Widerspruch zu ihren Aussagen steht: Yuri und Stefan können Recht mit ihrer jeweiligen Behauptung haben, nichts davon mitbekommen zu haben, wie Felix das Fenster kaputt gemacht hat. Sascha hat ebenfalls recht. Also hat nur Felix gelogen. **(1)**

(b)
- Yuri, der den Monat kennt, weiß, das Felix, welcher den Tag kennt, nicht Saschas Geburtstag kennt. Daher fallen der 11. März und der 12. Juni heraus, da dies die einzigen Daten mit einem bestimmten Tag sind. **(1)**
- Folglich können März und Juni auch nicht die Monate von Saschas Geburtstag sein, da Yuri sich sonst nicht sicher sein könnte, dass Felix es nicht weiß. Also hat Sascha im April oder Mai Geburtstag. **(1)**
- Sascha kann nun nicht am 21. Geburtstag haben, denn Felix würde die gleichen Schlüsse ziehen wie wir und damit nur wissen, dass Sascha im April oder Mai Geburtstag hat, der 21. kommt aber in beiden Monaten vor. Folglich hat Sascha am 8. oder 29. April oder am 23. Mai Geburtstag. **(1)**
- Da Felix den Tag kennt und alle drei Tage verschieden sind, kennt er nun Saschas Geburtstag. Da Yuri die Antwort nach Felix Aussage ebenfalls kennt, kommt nur noch der Mai in Frage, da Yuri im April nicht zwischen dem 8. und dem 29. unterscheiden könnte. **(1)**
- Also hat Sascha am 23. Mai Geburtstag. **(2)** (2 Punkte für das richtige Ergebnis)

Bepunktungsvorschlag: Siehe oben in Klammern. Natürlich könnten auch andere Argumentationen bzw. Reihenfolgen der Argumente auftreten. Hier sollten die genannten Fakten und gezogenen Schlüsse ähnlich bepunktet werden wie oben.

(a) Die Lösung benutzt die in der folgenden Zeichnung eingeführten Bezeichnungen.



Da die Kugel auf demselben Wege zu A zurückrollt, wird sie bei F wieder nach E reflektiert. Also ist

$$\angle SFE = \angle EFD = 90^\circ.$$

(Sinnvoller Ansatz: 1 Punkt)

Im Dreieck ΔSEF ist $\angle FES + 90^\circ + 13^\circ = 180^\circ$, also ist $\angle FES = 77^\circ$. Da die Kugel in F reflektiert wird, ist

$$\angle CED = \angle FES = 77^\circ.$$

Im Dreieck ΔFED ist

$$\angle DEF = 180^\circ - 2 \cdot 77^\circ = 26^\circ$$

(Winkelsumme am gestreckten Winkel), und deshalb

$$\angle EDF = 180^\circ - 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ.$$

Mit demselben Argument erhält man im Dreieck ΔDEC

$$\angle EDC = 52^\circ \text{ und } \angle ECD = \angle TCB = 51^\circ.$$

Im Dreieck ΔCDB ergibt sich damit $\angle DCB = 78^\circ$ und $\angle CBD = 38^\circ$.

Im letzten Schritt erhält man wegen der Reflektion in B im Dreieck noch

$$\angle CBA = 90^\circ - 2 \cdot 38^\circ = 104^\circ$$

und schließlich

$$\angle CTA = 180^\circ - 51^\circ - 104^\circ = 25^\circ.$$

(Sinnvolles Nutzen der Winkelsätze: 2 Punkte; richtige Ergebnisse: 2 Punkte; hier sind verschiedene Argumentationen möglich!)

(b) Die Kugel landet beim Anspielen des Bandenpunktes $(0|\frac{2}{3})$ an der linken Bande im Loch.

(Richtige Koordinate: 1 Punkt)

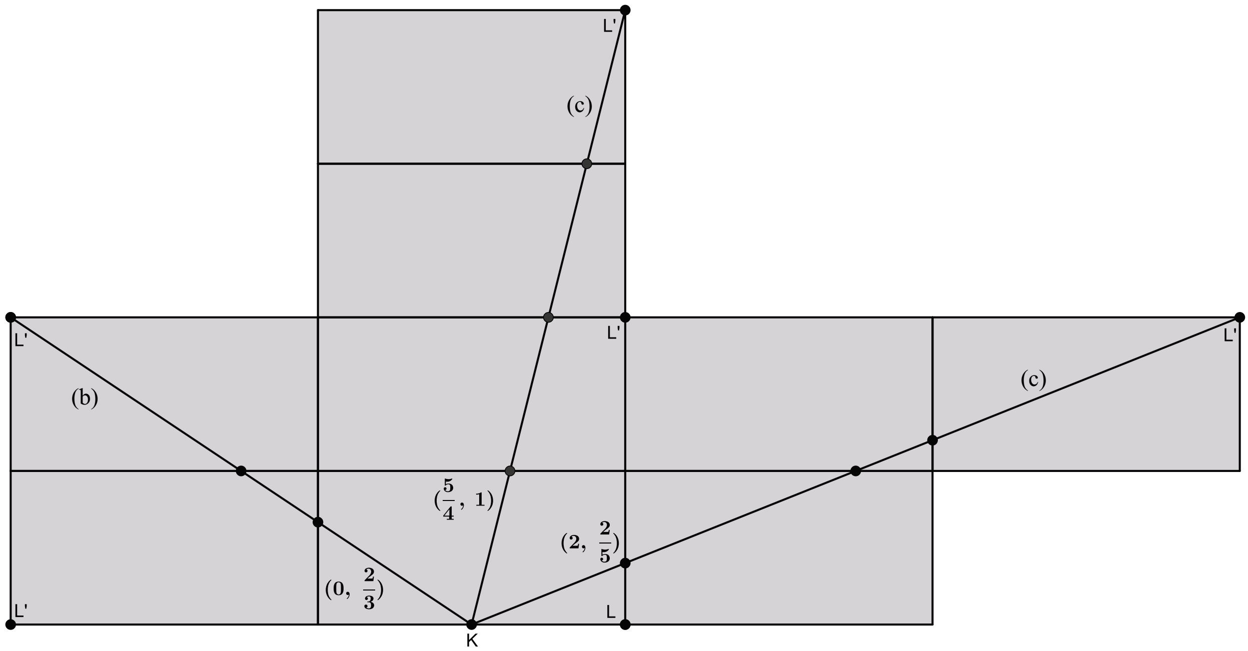
Dies lässt sich beispielsweise begründen, indem man wie im Bild unten das Feld des Billardtisches an den Banden spiegelt. Der Weg von K nach L lässt sich dann als gerade Linie einzeichnen, die genau zwei Banden schneiden muss. Es ergibt sich mithilfe eines Proportionalitäts-/Strahlensatzarguments für die gesuchte y-Koordinate auf der linken Bande

$$\frac{y}{1} = \frac{2}{3},$$

also ist der gesuchte Punkt $(0, \frac{2}{3})$.

(Dies ist die einzige Möglichkeit. Eine Begründung der Eindeutigkeit ist jedoch nicht gefordert.)

(Vollständige Begründung: 2 Punkte)



(c) Die zwei Möglichkeiten über drei Banden sind:

- Anspielen des Bandenpunktes $(1{,}25 \,|\, 1)$ an der oberen Bande (weitere Reflektionen in $(1{,}5 \,|\, 0), (1{,}75 \,|\, 1)$)
- Anspielen des Bandenpunkts $(2 \,|\, 0{,}4)$ an der rechten Bande (weitere Reflektionen in $(1{,}5 \,|\, 1), (0 \,|\, 1{,}2)$).

Zur Begründung, dass diese Möglichkeiten funktionieren, kann der Billardtisch wieder wie in (b) gespiegelt werden; es gibt dann genau diese zwei Möglichkeiten, eines der Löcher L' von K aus auf geradem Wege so zu erreichen, dass die Verbindungslinie genau drei Banden schneidet.

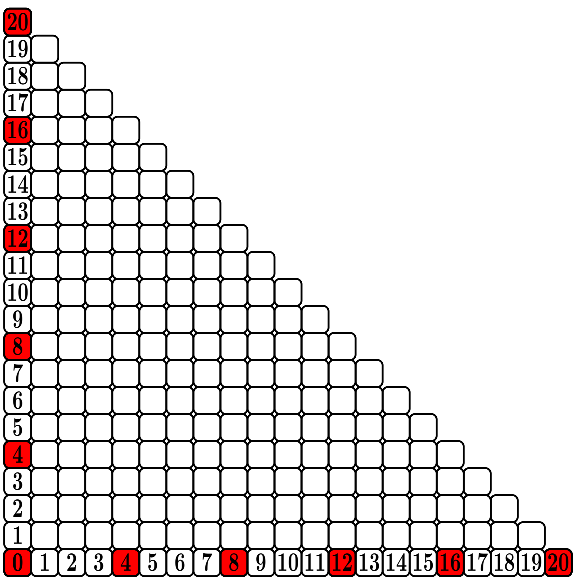
(Dies sind die einzigen zwei Möglichkeiten. Eine Begründung dafür ist jedoch nicht gefordert.)

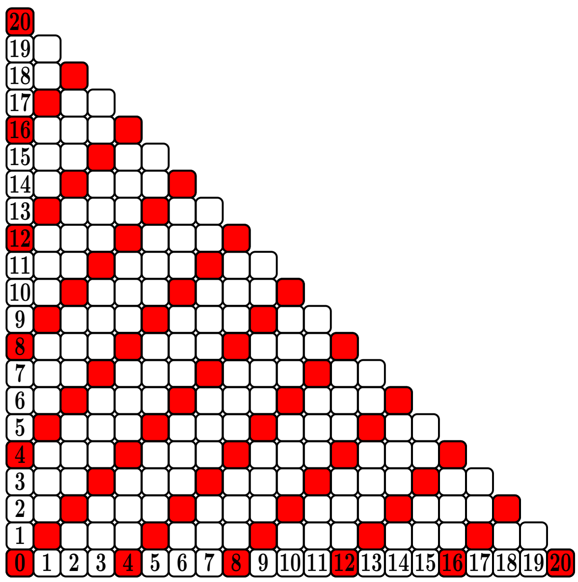
(Richtige Koordinate: je 1 Punkt)

a) Wir spielen das Spiel rückwärts. Offensichtlich verliert eine Spielerin, wenn sie am Zug ist, und vor sich 0 Steine liegen hat. Wir nennen die 0 eine *Verlustposition*. Hat man hingegen 1, 2 oder 3 Steine vor sich, kann man diese nehmen und gewinnt das Spiel. 1, 2 und 3 sind demnach *Gewinnpositionen*. Hat man 4 Steine vor sich liegen und muss 1, 2 oder 3 Steine wegnehmen, bringt man den Gegner automatisch in eine Gewinnposition. Die 4 ist entsprechend ebenso eine Verlustposition wie die 0. Entsprechend sind $4+1 = 5$, $4+2 = 6$ und $4+3 = 7$ wieder Gewinnpositionen und die 8 eine Verlustposition. So kann man nacheinander alle Zahlen bis 20 untersuchen und erhält: Jedes p mit $4|p$ ist eine Verlustposition und damit auch die 20, mit der Arzu beginnen muss. Berfin muss jetzt nur dafür sorgen, dass Arzu stets in einer Verlustposition bleibt. Da diese jeweils 4 voneinander entfernt sind, kann sie nach der einfachen Strategie spielen: Wenn Arzu z Steine zieht, dann zieht Berfin $4 - z$. Dann ist die Anzahl der Steine für Arzu um 4 gesunken, und wenn sie vorher in einer Verlustposition war, ist sie es wieder.

b) Wir gehen wie bei a) vor. Jetzt ist aber nicht die 0 eine Verlustposition, sondern die 1. Hat man nur noch einen Stein vor sich liegen, ist man nach den Regeln gezwungen, diesen auch zu nehmen und verliert damit das Spiel. Bei 2, 3 oder 4 Steinen kann man stets regelkonform auf einen Stein reduzieren und damit den Gegner zwingen, diesen zu nehmen. Die Gewinnpositionen sind also 2, 3 und 4 und die nächste Verlustposition ist die 5. Die weiteren Verlustpositionen haben alle die Form $4n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ und die größte, die in dem Spiel auftaucht ist 17. Wenn Arzu in ihrem ersten Zug 3 Steine nimmt und dann die gleiche Strategie wie in a) anwendet, wird Berfin stets in einer Verlustposition landen.

c) Jetzt müssen wir Paare von Zahlen $(x; y)$ darauf untersuchen, ob sie Gewinn- oder Verlustpositionen sind. Offensichtlich reduziert sich das Spiel auf die Variante a), wenn x oder y Null sind. Dafür sind auch Gewinn- und Verlustpositionen bekannt. Die einfachste weitere Verlustposition ist $(1; 1)$. In diesem Fall muss man den letzten Stein von einem Haufen nehmen und bringt damit den Gegner zwangsweise in eine Gewinnposition. Analog kann man alle Positionen der Form $(4n + 1; 1)$ bzw. $(1; 4n + 1)$ als Verlustpositionen bestimmen. Dies kann für alle Positionen der Form $(4n + a; a)$ bzw. $(a; 4n + a)$ fortgesetzt werden. Letztendlich kann man es vereinfacht so ausdrücken, dass eine Position $(x; y)$ mit $4|(x - y)$ eine Verlustposition ist.
Das Ganze kann man auch grafisch lösen, indem man in einer Tabelle ausgehend von den bekannten Verlustpositionen aus a) die weiteren sukzessive ermittelt.





Erkennbar wird, dass Berfin die Aufteilungen $(2;18)$, $(4;16)$, $(6;14)$, $(8;12)$, $(10;10)$ (und Vertauschungen der Reihenfolge) wählen kann, damit Arzu in einer Verlustposition mit $4|(x-y)$ startet. Ihre Gewinnstrategie ist, dass sie, wenn Arzu von einem Haufen z Steine zieht, entweder vom gleichen Haufen $4-z$ Steine nimmt oder z vom jeweils anderen Haufen.

<u>*Bepunktungsvorschlag:*</u>

4 a)
- Erkennen einer weiteren Verlustposition, z.B. 4 (1P)
- Verallgemeinerung und Erkennen aller Verlustpositionen (1P)
- Formulieren der Strategie (1P)

4 b)
- Erkennen der 1 als Verlustposition (1P)
- Adaptieren der Strategie aus 4 a) (1P)

4 c)
- Erkennen, dass das Spiel auf die Variante 4a hinausläuft, wenn ein Haufen leer wird (1P)
- Geeignete Formulierung einer Bedingung für die Verlustpositionen: Invariante 4 teilt $|x-y|$ oder Ausfüllen einer Tabelle (3P)
- Angabe der Verlustpositionen bestehend aus 20 Steinen (1P)
  (Achtung: (0;20) und (20;0) entsprechen nicht der Regel, dass zu Beginn kein Haufen leer ist.)

Laut Aufgabenstellung ist es nicht verlangt, eine Gewinnstrategie anzugeben, da dies bereits in die Konstruktion der Verlustpositionen einfließt.

Team Nr.

nur für Korrektur:

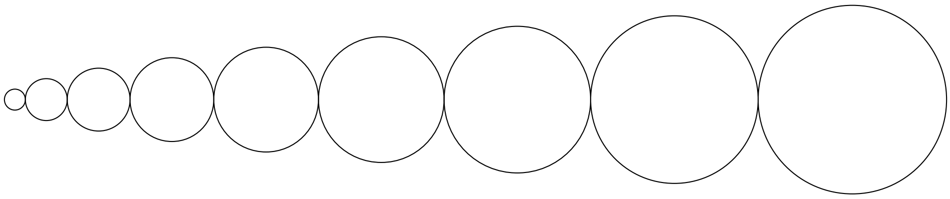
Punkte

Unterschrift

Aufgabe 1 (max. 10 Punkte)

Diese Aufgabe hat zwei voneinander unabhängige Teile.

(a) Die neun Rädchen 1, 2, ..., 9 berühren einander entsprechend der Abbildung.



Ihre Durchmesser sind 1 cm, 2 cm, ..., 9 cm. Um wieviel Grad dreht sich das Rädchen 9, wenn sich das erste Rädchen um $90°$ dreht?

(b) Ein Computervirus zerstört am ersten Tag die Hälfte des Festplattenspeichers, am zweiten ein Drittel der jetzt noch intakten Festplatte, am dritten ein Viertel der dann noch intakten Festplatte usw. Nach dem wievielten Tag ist nur noch der 2019. Teil der Festplatte unzerstört?

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 2 (max. 10 Punkte)

Betrachtet die 16 Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten (m, n), $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Begründet, warum man nicht 9 Punkte aus diesen 16 Punkten so auswählen kann, dass keine 3 von ihnen auf einer Geraden liegen.

(b) Findet eine möglichst große Teilmenge dieser 16 Punkte, so dass keine 3 der ausgewählten Punkte auf einer Geraden liegen.

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte
Unterschrift

Aufgabe 3 (max. 10 Punkte)

Diese Aufgabe hat zwei voneinander unabhängige Teile.

(a) Zeigt, dass die Summe der Quadrate von 7 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen niemals eine Quadratzahl ist.

(b) Zeigt, dass es unter 10 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen immer eine gibt, die zu den 9 anderen teilerfremd ist.

Team Nr.

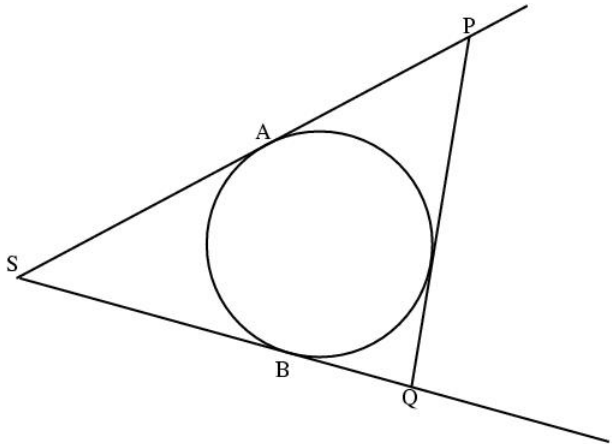
nur für Korrektur:

Punkte
Unterschrift

Aufgabe 4 (max. 10 Punkte)

(a) Es sei ein Kreis mit zwei Tangenten gegeben, die sich im Punkt S schneiden. Die Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis heißen A und B. Wir betrachten eine weitere Tangente an den Kreis, die die Strahlen SA bzw. SB in den Punkten P bzw. Q schneide. Dabei sollen die Punkte P und Q **nicht** auf den Strecken $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ liegen.
Zeigt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PSQ minimal ist, wenn die Streckenlängen von $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ übereinstimmen.

(b) Beweist, dass die Streckenlänge von $\overline{PQ}$ minimal ist, falls die Streckenlängen von $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ gleich sind.

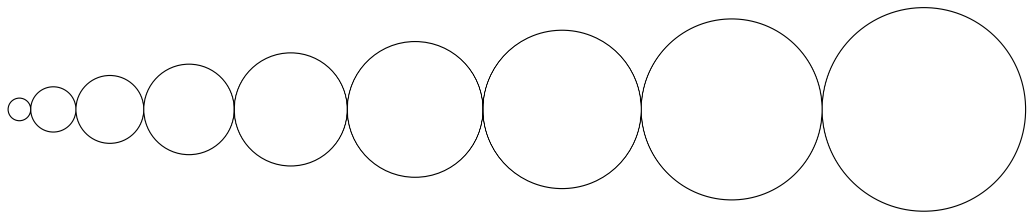


Tag der Mathematik 2019

Wettbewerbsaufgaben Klasse 9/10, Lösungen

Aufgabe 1. Diese Aufgabe hat zwei voneinander unabhgigige Teile.

(a) Die neun Rädchen 1, 2, . . . , 9 berühren einander entsprechend der Abbildung.



Ihre Durchmesser sind 1 cm, 2 cm, . . . , 9 cm. Um wieviel Grad dreht sich das Rädchen 9, wenn sich das erste Rädchen um 90° dreht?

(b) Ein Computervirus zerstört am ersten Tag die Hälfte des Festplattenspeichers, am zweiten ein Drittel der jetzt noch intakten Festplatte, am dritten ein Viertel der dann noch intakten Festplatte usw. Nach dem wievielten Tag ist nur noch der 2019. Teil der Festplatte unzerstört?

Lösung. (a) Ein Punkt auf dem Rand eines i-ten Rädchens mit Durchmesser d_i wird bei Rotation des Rädchens um den Winkel α_i (gemessen in Grad) um $\frac{\alpha_i}{360}\pi d_i$ bewegt, da der Umfang des i-ten Rädchens πd_i beträgt. Für den gesuchten Winkel α_9 gilt also

$$\frac{90}{360}\pi \cdot 1 = \frac{\alpha_2}{360}\pi \cdot 2 = \ldots = \frac{\alpha_8}{360}\pi \cdot 8 = \frac{\alpha_9}{360}\pi \cdot 9\,,$$

das heißt

$$\alpha_9 = 10^{\text{o}}\,.$$

(b) Der intakte Anteil ist nach einem Tag $\frac{1}{2}$, nach 2 Tagen $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, nach 3 Tagen $\frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ etc. Nach 2018 Tagen ist also nur noch der 2019. Teil der Festplatte intakt.

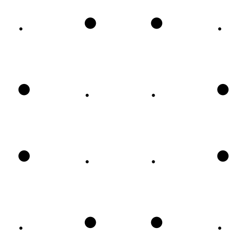
Aufgabe 2 Betrachtet die 16 Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten (m, n), $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Begründet, warum man nicht 9 Punkte aus diesen 16 Punkten so auswählen kann, dass keine 3 von ihnen auf einer Geraden liegen.

(b) Findet eine möglichst große Teilmenge dieser 16 Punkte, so dass keine 3 der ausgewählten Punkte auf einer Geraden liegen.

Lösung. (a) Wir haben 4 horizontale Geraden; bei 9 ausgewählten Punkten muss also eine dieser Geraden mindestens 3 ausgewählte Punkte enthalten. (Genauso kann man natürlich mit vertikalen Geraden argumentieren.)

(b) Man kann 8 Punkte wie gefordert auswählen, z.B. so:



Aufgabe 3 Diese Aufgabe hat zwei voneinander unabhängige Teile.

(a) Zeigt, dass die Summe der Quadrate von 7 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen niemals eine Quadratzahl ist.

(b) Zeigt, dass es unter 10 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen immer eine gibt, die zu den 9 anderen teilerfremd ist.

Lösung. (a) Die 7 aufeinanderfolgenden Zahlen seien $n, n+1, \ldots, n+6$. Die Summe ihrer Quadrate ist

$$S = n^2 + (n+1)^2 + \cdots + (n+6)^2.$$

Beachte $(n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2$; also ist

$$\begin{aligned} S &= 7n^2 + 2n \cdot (1 + \cdots + 6) + (1^2 + \cdots + 6^2) \\ &= 7n^2 + 42n + 91 = 7 \cdot (n^2 + 6n + 13). \end{aligned}$$

Daher ist S durch 7 teilbar, und wäre S eine Quadratzahl, wäre auch $n^2+6n+13$ durch 7 teilbar. Das passiert aber dann und nur dann, wenn die etwas einfachere Zahl $n^2+6n+13-7n-14 = n^2-n-1$ durch 7 teilbar ist. Hat aber n bei Division durch 7 den Rest r, so ist $n^2 - n - 1$ durch 7 teilbar, wenn $r^2 - r - 1$ durch 7 teilbar ist und umgekehrt. [Schreibt man nämlich $n = 7m + r$, so ist $n^2 - n - 1 = (49m^2 + 14mr - 7m) + r^2 - r - 1$, und der Term in der Klammer ist durch 7 teilbar.] Daher muss nur für $r = 0, \ldots, 6$ überprüft werden, ob $r^2 - r - 1$ durch 7 teilbar ist:

r	0	1	2	3	4	5	6
$r^2 - r - 1$	-1	-1	1	5	11	19	29

Variante. Das Argument wird ein bisschen einfacher, wenn man nicht die erste, sondern die mittlere Zahl n nennt. Dann geht es um

$$n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$$

mit der Quadratsumme

$$S' = (n-3)^2 + \cdots + n^2 + \cdots + (n+3)^2.$$

Beachte jetzt $(n-k)^2 + (n+k)^2 = 2n^2 + 2k^2$, so dass

$$\begin{aligned} S' &= 2(n^2 + 3^2) + 2(n^2 + 2^2) + 2(n^2 + 1^2) + n^2 \\ &= 7n^2 + 2 \cdot 14 = 7(n^2 + 4). \end{aligned}$$

Wie bei der ersten Lösung müssen wir ausschließen, dass $n^2 + 4$ durch 7 teilbar ist, und das geht wieder durch vollständige Fallunterscheidung mit Hilfe der 7er Reste:

r	0	1	2	3	4	5	6
$r^2 + 4$	4	5	8	13	20	29	40

(b) Wenn unter den 10 aufeinanderfolgenden Zahlen eine ist, die weder durch 2, 3, 5 noch durch 7 teilbar ist, muss sie zu den übrigen teilerfremd sein, da keine zwei der 10 Zahlen einen gemeinsamen Primteiler ≥ 11 haben können. Wir werden überlegen, dass es immer solch eine Zahl gibt.

Unter den 10 Zahlen sind fünf, die durch 2 teilbar sind. Ferner sind unter den 10 Zahlen höchstens vier, die durch 3 teilbar sind, und von diesen sind höchstens zwei ungerade. Also haben höchstens

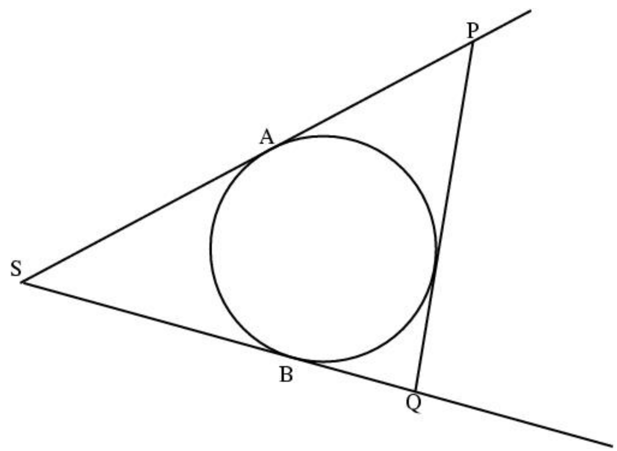
7 Zahlen die Primteiler 2 oder 3. Unter den 10 Zahlen sind zwei, die durch 5 teilbar sind, davon ist eine gerade und eine ungerade. Die gerade von den beiden ist schon in unserer 7er Liste, die ungerade eventuell noch nicht. Also haben höchstens 8 Zahlen die Primteiler 2, 3 oder 5. Unter den 10 Zahlen sind höchstens zwei, die durch 7 teilbar sind, davon ist höchstens eine ungerade (die noch nicht in unserer Liste ist). Also haben höchstens 9 Zahlen die Primteiler 2, 3, 5 oder 7. Das war zu begründen.

Übrigens ist $110, \dots, 119$ eine Folge von 10 aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen eine einzige zu den übrigen teilerfremd ist, und es ist die erste mit dieser Eigenschaft.

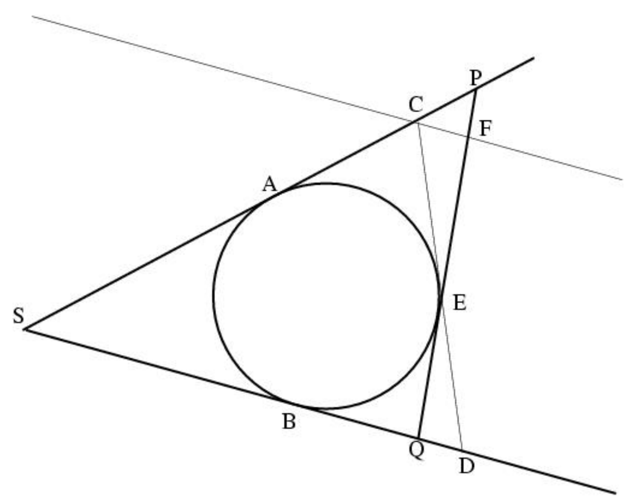
Aufgabe 4.

(a) Es sei ein Kreis mit zwei Tangenten gegeben, die sich im Punkt S schneiden. Die Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis heißen A und B. Wir betrachten eine weitere Tangente an den Kreis, die die Strahlen SA bzw. SB in den Punkten P bzw. Q schneide. Dabei sollen die Punkte P und Q nicht auf den Strecken $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ liegen. Zeigt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PSQ minimal ist, wenn die Streckenlängen von $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ übereinstimmen.

(b) Beweist, dass die Streckenlänge von $\overline{PQ}$ minimal ist, falls die Streckenlängen von $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ gleich sind.

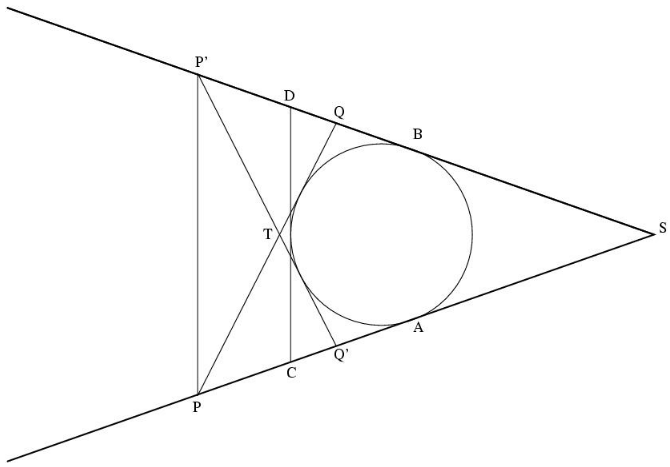


Lösung. (a) Nehmen wir an, dass die Strecke $\overline{SQ}$ kürzer als die Strecke $\overline{SP}$ ist (sonst müssen in dem folgenden Argument die Rollen von P und Q vertauscht werden); siehe Skizze. Es sei CD diejenige Tangente an den Kreis mit $\overline{SC} = \overline{SD}$ und E der Schnittpunkt der Tangenten PQ und CD. Es genügt nun zu zeigen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks QDE kleiner ist als der von PCE. Betrachten wir aber zusätzlich die Parallele von BS durch C, so sind die Dreiecke FCE und QDE ähnlich. Nun ist die Strecke ED kürzer als die Strecke EC, und daraus folgt die Ungleichung der Flächeninhalte $F(QDE) < F(FCE) < F(PCE)$.



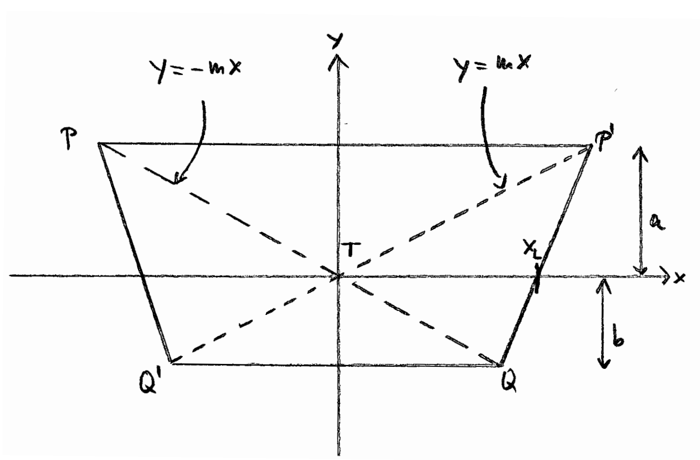
Daher hat das Dreieck SDC minimalen Flächeninhalt.

(b) Eintragen der gespiegelten Tangente $\overline{P'Q'}$ wie im Bild liefert ein gleichschenkliges Trapez $PQ'QP'$, in dem die Tangente $\overline{PQ}$ eine Diagonale ist. Deshalb ist $\overline{PQ} > \overline{CD}$; detaillierte Begründung folgt.



Tatsächlich stimmt diese Ungleichung sogar, wenn man statt $\overline{CD}$ die dazu parallele Strecke im Trapez durch den Schnittpunkt T der Diagonalen betrachtet, die größer als $\overline{CD}$ ist. Das werden wir jetzt mit etwas analytischer Geometrie nachrechnen.

Dazu drehen wir die Anordnung so, dass T im Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt und die parallelen Seiten des Trapezes zur x-Achse parallel sind:



Zuerst beobachten wir, dass $a > b$ ist, denn die Dreiecke $TP'P$ und $TQ'Q$ sind ähnlich mit $\overline{PP'} > \overline{QQ'}$.

Es hat P die Koordinaten $(x_P, -mx_P)$ mit $-mx_P = a$, also

$$P = \left(-\frac{a}{m}, a\right) \qquad \text{und} \qquad P' = \left(\frac{a}{m}, a\right).$$

Genauso hat Q die Koordinaten (x_Q, mx_Q) mit $mx_Q = -b$, also

$$Q = \left(\frac{b}{m}, -b\right) \qquad \text{und} \qquad Q' = \left(-\frac{b}{m}, -b\right).$$

Uns interessiert die x-Koordinate des Punktes $(x_L, 0)$ in der rechten Halbebene (x_L ist die Hälfte der Länge der zu $\overline{CD}$ parallelen Strecke durch T). Da $(x_L, 0)$ auf der Strecke $\overline{QP'}$ liegt, gibt es ein $\lambda > 0$ mit

$$(x_L, 0) = Q + \lambda(P' - Q) = \Big(\frac{b}{m}, -b\Big) + \lambda\Big(\frac{a-b}{m}, a - (-b)\Big) = \Big(\frac{b}{m} + \lambda\frac{a-b}{m}, -b + \lambda(a+b)\Big).$$

Da die 2. Koordinate $= 0$ ist, folgt $\lambda = \frac{b}{a+b}$, also

$$x_L = \frac{b}{m} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a-b}{m} = \frac{(a+b)b + b(a-b)}{(a+b)m} = \frac{2ab}{(a+b)m}.$$

Andererseits ist nach dem Satz von Pythagoras

$$\overline{PQ}^2 = \Big(\frac{-a}{m} - \frac{b}{m}\Big)^2 + (a - (-b))^2 = \frac{(a+b)^2(m^2+1)}{m^2}.$$

Die behauptete Ungleichung ist also $(2x_L)^2 < \overline{PQ}^2$, d.h.

$$\Big(\frac{4ab}{(a+b)m}\Big)^2 < \frac{(a+b)^2(m^2+1)}{m^2} \qquad \text{für } a > b > 0.$$

Umstellen liefert die äquivalente Ungleichung

$$(4ab)^2 < (a+b)^4(m^2+1) \qquad \text{für } a > b > 0.$$

Nun ist für $a \neq b$

$$4ab < (a+b)^2,$$

denn $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 > 0$; also gilt in der Tat für $a > b > 0$

$$(4ab)^2 < (a+b)^4 \le (a+b)^4 + m^2(a+b)^4 = (a+b)^4(m^2+1),$$

was zu zeigen war.

Variante. Alternativ kann man von den Koordinatendarstellungen

$$P = (-x_2, a), \quad P' = (x_2, a), \quad Q = (x_1, -b), \quad Q' = (-x_1, -b)$$

ausgehen. Es ist dann

$$\frac{x_L - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{b}{a+b}, \qquad \frac{x_2}{a} = \frac{x_1}{b}.$$

Die zu zeigende Ungleichung ist (Pythagoras)

$$(x_2 + x_1)^2 + (a+b)^2 > (2x_L)^2. \tag{$*$}$$

Die erste Gleichung der vorletzten Zeile liefert

$$x_L = \frac{a}{a+b}x_1 + \frac{b}{a+b}x_2;$$

setzt man dieses x_L und $x_2 = \frac{a}{b}x_1$ in $(*)$ ein, so entsteht die zu $(*)$ äquivalente Ungleichung

$$x_1^2 + b^2 > 16\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^2\Big(\frac{b}{a+b}\Big)^2 x_1^2. \tag{$**$}$$

Da $x_1^2 + b^2 > x_1^2$, müssen wir zum Beweis von $(**)$ die Ungleichung

$$16\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^2\Big(\frac{b}{a+b}\Big)^2 \leq 1,$$

begründen, also mit der Abkürzung $r = \frac{a}{a+b}$ (so dass $1 - r = \frac{b}{a+b}$)

$$4r(1-r) \leq 1.$$

Das sieht man durch quadratische Ergänzung so:

$$4r(1-r) = -4r^2 + 4r = -4r^2 + 4r - 1 + 1 = -(2r-1)^2 + 1 \leq 1.$$

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 1 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 5 Punkte, (b) : 5 Punkte)

Eine Ziege grast auf einer Weide. Allerdings ist sie mit einem 10 Meter langen Seil an einer rechteckigen Scheune angebunden.
Die Scheune ist 6 Meter mal 4 Meter groß und die Befestigung der Leine befindet sich in der Mitte einer langen Seite.

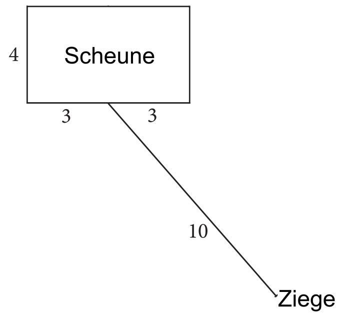


Abbildung 1: *
An der Scheune angeleinte Ziege

a) Berechnet den Flächeninhalt, den die Ziege abgrasen kann.

b) Die Bäuerin bekommt Mitleid mit der Ziege und verlängert die Leine um zwei Meter. Welche Fläche kann die Ziege nun erreichen?

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 2 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 3 Punkte, (b) : 2 Punkte, (c) : 5 Punkte)

a.) Findet eine Menge M von zehn natürlichen Zahlen, sodass jede Zahl zwischen 1 und 1000 als Summe der Elemente einer Teilmenge dieser zehn Zahlen geschrieben werden kann. Insbesondere darf keine Zahl aus M häufiger als einmal als Summand vorkommen. Begründet, wieso eure Menge die geforderte Eigenschaft erfüllt.

b.) Beweist, dass alle ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden können.
Zum Beispiel ist

$$1557 = 257 + 258 + 259 + 260 + 261 + 262.$$

c.) Tatsächlich kann sogar jede Zahl zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden, bis auf eine. Findet heraus, welche Zahl dies ist, und beweist, dass diese Zahl in der Tat die einzige Zahl zwischen 1000 und 2000 ist, die nicht als solche Summe geschrieben werden kann!

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 3 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 2 Punkte, (b) : 5 Punkte, (c) : 3 Punkte)

In der Ebene seien eine Strecke $\overline{AB}$ sowie ein Punkt C im Inneren dieser Strecke gegeben. Über den drei Strecken $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ wird jeweils ein Halbkreis errichtet. Die von diesen Halbkreisen begrenzte Figur heißt *Arbelos* (griechisch $A\rho\beta\upsilon\lambda o\varsigma$ für Schustermesser) oder auch *Sichel des Archimedes* (Abbildung links).

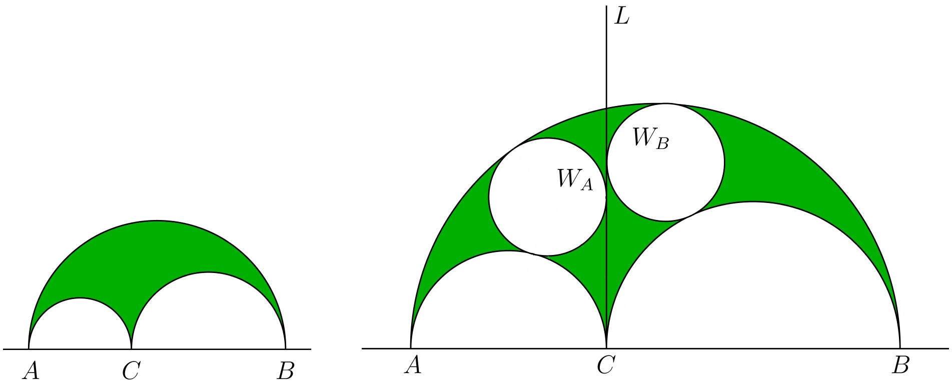


Abbildung 2: *
Arbelos und Zwillingskreise des Archimedes

a) Beweist, dass der Weg von A nach B entlang des großen Halbkreises genauso lang ist wie der Weg von A über C nach B entlang der beiden kleinen Halbkreise.

b) Sei L die auf AB senkrechte Gerade durch den Punkt C. Diese Gerade zerlegt den Arbelos in zwei Teile. Seien W_A und W_B die maximalen in diese Gebiete einschreibbaren Kreise (Abbildung rechts). Zeigt, dass W_A und W_B gleich groß sind. Diese Kreise werden auch die *Zwillingskreise des Archimedes* genannt.

c) Beweist, dass der kleinste Kreis, der die beiden Kreise W_A und W_B in seinem Inneren enthält, den gleichen Flächeninhalt hat wie der Arbelos!

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte
Unterschrift

Aufgabe 4 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) - (e): je 2 Punkte)

Sei X eine Menge von 2019 verschiedenen Punkten in der Ebene. Jeder Punkt P habe dabei genau einen Punkt Q, der ihm am nächsten ist. Dieser Punkt Q heiße *Nachbar* von P und wird mit diesem durch eine Strecke verbunden. Die Menge aller eingezeichneten Strecken sei S.

a.) Beweist, dass die Menge S mindestens 1010 Strecken enthält.
Beschreibt ein Beispiel für eine Menge X, sodass es genau 1010 Strecken in S gibt.

b.) Beweist, dass es mindestens einen Punkt gibt, der nicht Nachbar irgendeines anderen Punktes ist.

c.) Beweist, dass kein Punkt Endpunkt von mehr als fünf Strecken ist.

d.) Beweist, dass sich keine zwei Strecken in ihrem Inneren schneiden.

e.) Beweist, dass S keinen geschlossenen Streckenzug enthält.

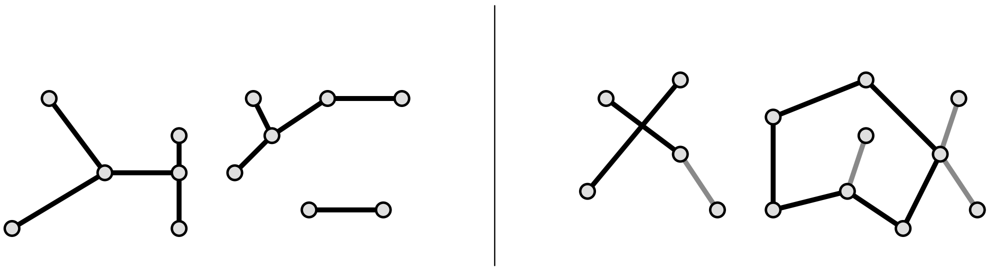


Abbildung 3: *
Beispiele für eine mögliche und eine nicht mögliche Streckenmenge S

Das Beispiel links in der Abbildung zeigt eine Streckenmenge S, die aus der oben beschriebenen Prozedur entstanden ist. Die Streckenmenge rechts dagegen enthält sich schneidende Strecken und einen geschlossenen Streckenzug, sodass sie in keinem Fall auftreten kann.

24. Berliner Tag der Mathematik

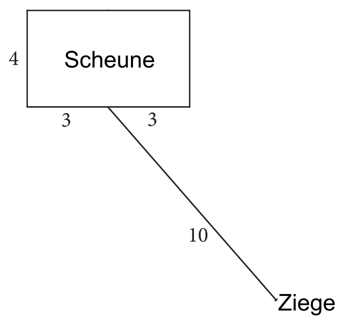
Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 11–13

11. Mai 2019

Aufgabe 1

5+5 Punkte

Eine Ziege grast auf einer Weide. Allerdings ist sie mit einem 10 Meter langen Seil an einer rechteckigen Scheune angebunden. Die Scheune ist 6 Meter mal 4 Meter groß und die Befestigung der Leine befindet sich in der Mitte einer langen Seite.



An der Scheune angeleinte Ziege

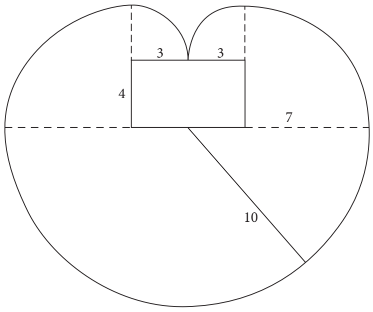
a) Berechnet den Flächeninhalt, den die Ziege abgrasen kann.

b) Die Bäuerin bekommt Mitleid mit der Ziege und verlängert die Leine um zwei Meter. Welche Fläche kann die Ziege nun erreichen?

Lösung

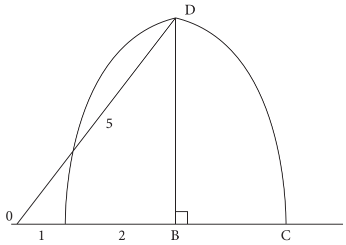
a) Der Abbildung können wir entnehmen, dass die Ziege eine Fläche erreicht, die aus sechs Viertelkreisen besteht. Ihr Flächeninhalt ist gleich der Summe der Flächeninhalte der drei Halbkreise der Radien $10, 10-3=7$ und $7-4=3$ Metern. Die Ziege kann also eine Fläche von $(10^2+7^2+3^2)\pi/2 = 79\pi$ Quadratmetern abgrasen.

b) Mit der längeren Leine überlappen die beiden kleinen Viertelkreise hinter der Scheune, da ihr gemeinsamer Radius nun $12-3-4=5$ Meter beträgt. Wenn wir für einen kurzen Moment diese Überlappung ignorieren, dann ist die Summe der Flächeninhalte der drei Halbkreise $(12^2+9^2+5^2)\pi/2 = 125\pi$. Von diesem Flächeninhalt müssen wir aber noch die



Von der Ziege abgrasbare Fläche

Fläche A des sich überlappenden Gebietes abziehen, welches die Form einer Bischofsmütze hat.



Überlappendes Gebiet in Form einer Bischofsmütze

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|\overline{BD}|^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, sodass $|\overline{BD}| = 4$. Wir können die beiden Hälften der Mitra anstelle an der vertikalen Symmetrieachse an der horizontalen Achse aneinanderkleben, sodass ein Segment eines Kreises mit dem Radius 5 und der Sehnenlänge $2|\overline{BD}| = 8$ entsteht. Der Kreiswinkel α des Segmentes vom Mittelpunkt des Kreises aus gemessen ist dann $2\arctan(4/3)$. Der Flächeninhalt des Segmentes ist dann der Flächeninhalt des entsprechenden Kreissektors minus dem Flächeninhalt der dreieckigen Fläche außerhalb des Sektors. Wir erhalten

$$A = \frac{2\arctan(4/3)}{2\pi}(5^2\pi) - \frac{8 \cdot 3}{2} = 25\arctan(4/3) - 12.$$

Die Ziege kann also eine Fläche von $125\pi - 25\arctan(4/3) + 12$ Quadratmetern abgrasen. $\square$

Aufgabe 2

3+2+5 Punkte

a) Findet eine Menge M von zehn natürlichen Zahlen, sodass jede Zahl zwischen 1 und 1000 als Summe der Elemente einer Teilmenge dieser zehn Zahlen geschrieben werden kann. Insbesondere darf keine Zahl aus M häufiger als einmal als Summand vorkommen. Begründet, wieso eure Menge die geforderte Eigenschaft erfüllt.

b) Beweist, dass alle ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden können. Zum Beispiel ist

$$1557 = 257 + 258 + 259 + 260 + 261 + 262.$$

c) Tatsächlich kann sogar jede Zahl zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden, bis auf eine. Findet heraus, welche Zahl dies ist, und beweist, dass diese Zahl in der Tat die einzige Zahl zwischen 1000 und 2000 ist, die nicht als solche Summe geschrieben werden kann!

Lösung

a) Wenn wir die Binärdarstellung einer Zahl verwenden, so wird offensichtlich, dass sich jede Zahl zwischen 1 und 1023 als Summe einer Teilmenge von Zahlen der Menge

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$$

schreiben lässt.

b) Jede ungerade Zahl ist von der Form $2k+1$ und lässt sich daher als $k+(k+1)$ schreiben.

c) Wenn man mit kleinen Zahlen etwas experimentiert, findet man schnell heraus, dass die einzigen Zahlen, die nicht als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Dezimalzahlen geschrieben werden können (kurz: *als SAND*), Zweierpotenzen sind. Die einzige Zweierpotenz zwischen 1000 und 2000 ist 1024, folglich behaupten wir, dass 1024 die einzige Zahl zwischen 1000 und 2000 ist, die kein SAND ist.
Wenn die natürliche Zahl n keine Zweierpotenz ist, hat n einen ungeraden Teiler $(2s+1)$. Wir können also $n = r(2s+1)$ mit $r, s \geq 1$ schreiben. Dann gilt

$$(\star) \quad (r-s) + (r-s+1) + \ldots + r + \ldots + (r+s-1) + (r+s) = r(2s+1) = n,$$

da $-s$ im ersten Summanden das $+s$ im letzten Summanden aufhebt, $-s+1$ im zweiten und $s-1$ im vorletzten Summanden addieren sich zu Null, und so weiter. Allerdings besteht die Summe $(\star)$ nicht aus positiven ganzen Zahlen, wenn $r - s \leq 0$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $r-s$ als $-k$ und erkennen, dass $(\star)$ wie folgt beginnt:

$$-k + (-k+1) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + \ldots + (k-1) + k = 0.$$

Wir können also einfach die ersten $2k+1$ Terme der Summe $(\star)$ streichen um n als SAND zu schreiben. In der Tat bleiben $2(s+1) - (2k+1) = 2(s-k) = 2r \geq 2$ positive ganze Zahlen in der Summe $(\star)$ über.
Beispiel: $n = 44 = 4 \cdot 11$, also $r = 4$ und $s = 5$. Dann ist $r - s = -1$ und $r + s = 9$. Mit Hilfe von $(\star)$ erhalten wir

$$(-1 + 0 + 1) + 2 + \ldots + 9 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44.$$

Zweierpotenzen lassen sich allerdings nicht als SAND schreiben. Dazu schreiben wir eine Zahl n, die SAND ist, wie folgt mit ganzen Zahlen $k, m \geq 1$:

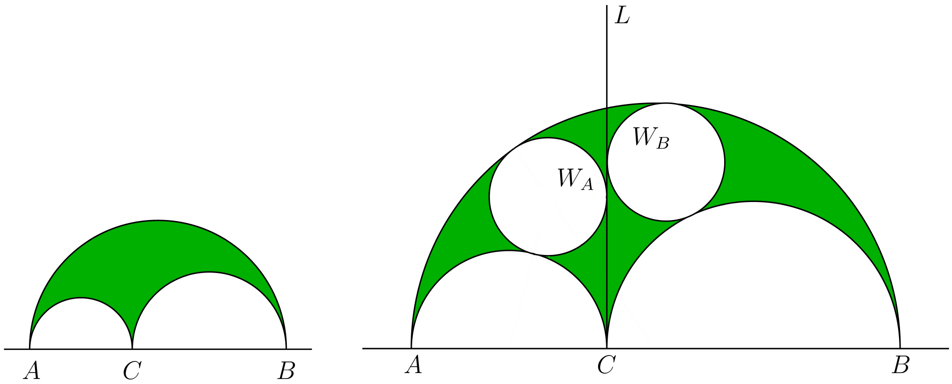
$$n = k + (k+1) + \ldots + (k+m) = (m+1)k + \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}(m+1)(2k+m).$$

Ist m gerade, so ist auch $2k+m$ gerade und $m+1 \geq 3$ ein ungerader Teiler von n. Ist m ungerade, so ist $m+1$ gerade und $2k+m \geq 3$ ist ein ungerader Teiler von n. In jedem Fall hat n einen ungeraden Teiler und kann keine Zweierpotenz sein, wenn es SAND ist.
$\square$

Aufgabe 3

2+5+3 Punkte

In der Ebene seien eine Strecke $\overline{AB}$ sowie ein Punkt C im Inneren dieser Strecke gegeben. Über den drei Strecken $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ wird jeweils ein Halbkreis errichtet. Die von diesen Halbkreisen begrenzte Figur heißt *Arbelos* (griechisch $A\rho\beta\upsilon\lambda o\varsigma$ für Schustermesser) oder auch *Sichel des Archimedes* (Abbildung links).



Arbelos und Zwillingskreise des Archimedes

a) Beweist, dass der Weg von A nach B entlang des großen Halbkreises genauso lang ist wie der Weg von A über C nach B entlang der beiden kleinen Halbkreise.

b) Sei L die auf AB senkrechte Gerade durch den Punkt C. Diese Gerade zerlegt den Arbelos in zwei Teile. Seien W_A und W_B die maximalen in diese Gebiete einschreibbaren Kreise (Abbildung rechts). Zeigt, dass W_A und W_B gleich groß sind. Diese Kreise werden auch die *Zwillingskreise des Archimedes* genannt.

c) Beweist, dass der kleinste Kreis, der die beiden Kreise W_A und W_B in seinem Inneren enthält, den gleichen Flächeninhalt hat wie der Arbelos!

Lösung

a) Der Umfang eines Halbkreises mit Durchmesser d ist $\pi d/2$. Folglich ist die Länge des Weges entlang des großen Halbkreises gleich

$$\frac{\pi}{2}|\overline{AB}| = \frac{\pi}{2}(|\overline{AC}| + |\overline{CB}|),$$

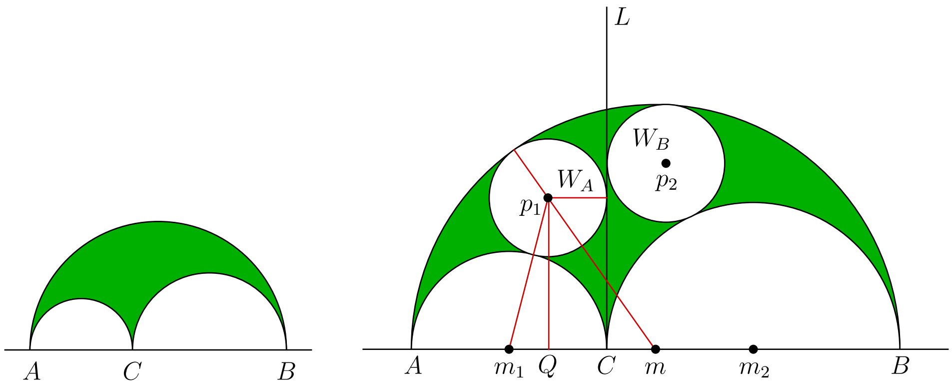
welches der Länge des Weges entlang der beiden kleinen Halbkreise entspricht.

b) Die Mittelpunkte der Kreise des Arbelos seien m_1, m_2 und m. Die Mittelpunkte von W_A und W_B seien p_1 und p_2. Die Radien der Kreise des Arbelos bezeichnen wir mit r_1, r_2 und r, sodass $r_1 + r_2 = r$. Die Radien von W_A und W_B seien ρ_1 und ρ_2. Wir behaupten

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

In unserer Rechnung nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $r_1 \leq r_2$ gilt. Da W_A den großen und den linken Halbkreis berührt, haben wir

$$|\overline{m_1 p_1}| = r_1 + \rho_1 \text{ und } |\overline{m p_1}| = r - \rho_1 = r_1 + r_2 - \rho_1.$$



Notation für Teil b)

Sei nun Q der Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$, der auf der Parallelen zu L durch p_1 liegt. Da W_A die Gerade L berührt, gilt:

$$|\overline{m_1Q}| = r_1 - \rho_1,$$
$$|\overline{mQ}| = |\overline{mC}| + |\overline{CQ}| = |\overline{mA}| - |\overline{AC}| + \rho_1 = r_2 + r_1 - 2r_1 + \rho_1 = r_2 - r_1 + \rho_1.$$

Der Satz von Pythagoras angewandt auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle m_1Qp_1$ und $\triangle p_1Qm$ liefert nun

$$|\overline{Qp_1}|^2 = (r_1+\rho_1)^2 - (r_1-\rho_1)^2 = (r_1+r_2-\rho_1)^2 - (r_2-r_1+\rho_1)^2.$$

Daraus folgt $4r_1\rho_1 = 4r_2(r_1-\rho_1)$ und somit

$$\rho_1 = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}.$$

ρ_2 berechnet sich ganz analog.

c) Da die zu zeigende Aussage skalierungsinvariant ist, können wir ohne Einschränkung $r_1 + r_2 = 1$ annehmen. Aus Teil b) wissen wir dann $\rho := \rho_1 = \rho_2 = r_1r_2$.
Der Mittelpunkt des kleinsten Kreises, der W_A und W_B enthält, liegt auf der Strecke $\overline{p_1p_2}$. Sein Durchmesser ist

$$d := \rho_1 + |\overline{p_1p_2}| + \rho_2 = 2\rho + |\overline{p_1p_2}|.$$

Der Abstand zwischen p_1 und p_2 entlang der Geraden AB ist $\rho_1 + \rho_2 = 2\rho$, da die beiden Kreise L berühren. Entlang der Geraden L beträgt der Abstand

$$|\overline{Q'p_2}| - |\overline{Qp_1}| = 2\sqrt{r_2\rho} - 2\sqrt{r_1\rho}.$$

Hierbei ist Q' der Punkt auf $\overline{AB}$, der auf der Parallelen zu L durch p_2 liegt, und $|\overline{Q'p_2}|^2 = 4r_2\rho$ berechnet sich genauso wie $|\overline{Qp_1}|^2 = 4r_1\rho$ in Teil b). Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann:

$$\begin{aligned}
|\overline{p_1p_2}|^2 &= (2\rho)^2 + (|\overline{Q'p_2}| - |\overline{Qp_1}|)^2 \\
&= 4\rho^2 + 4(\sqrt{r_2\rho} - \sqrt{r_1\rho})^2 \\
&= 4\left(\rho^2 + r_2\rho + r_1\rho - 2\rho(\sqrt{r_2r_1})\right) \\
&= 4\rho\left(\rho + r_2 + r_1 - 2\sqrt{\rho}\right) \\
&= 4\rho\left(1 + \rho - 2\sqrt{\rho})\right) \\
&= \left(2\sqrt{\rho}(1-\sqrt{\rho})\right)^2.
\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für den Durchmesser d:

$$d = 2\rho + 2\sqrt{\rho}(1 - \sqrt{\rho}) = 2\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho} + 1 - \sqrt{\rho}) = 2\sqrt{\rho}.$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist daher $\pi d^2/4 = \pi\rho = \pi r_1 r_2$. Der Flächeninhalt des Arbelos ist die Differenz der Flächeninhalte des großen und der beiden kleinen Halbkreise, also $\pi(r_1 + r_2)^2/2 - \pi r_1^2/2 - \pi r_2^2/2 = \pi r_1 r_2$. Damit stimmen die beiden Flächeninhalte überein. □

Aufgabe 4

2+2+2+2+2 Punkte

Sei X eine Menge von 2019 verschiedenen Punkten in der Ebene. Jeder Punkt P habe dabei genau einen Punkt Q, der ihm am nächsten ist. Dieser Punkt Q heiße *Nachbar* von P und wird mit diesem durch eine Strecke verbunden. Die Menge aller eingezeichneten Strecken sei S.

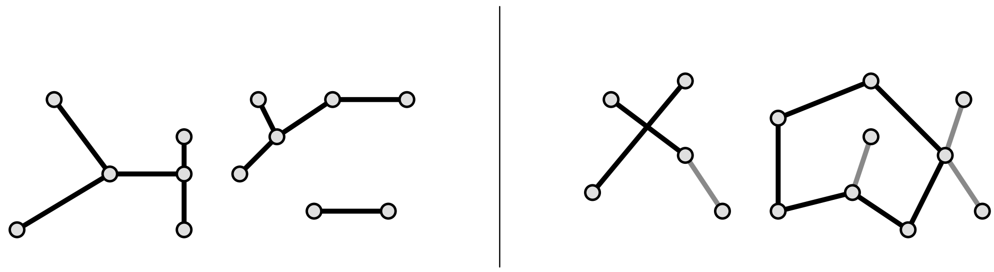
a) Beweist, dass die Menge S mindestens 1010 Strecken enthält. Beschreibt ein Beispiel für eine Menge X, sodass es genau 1010 Strecken in S gibt.

b) Beweist, dass es mindestens einen Punkt gibt, der nicht Nachbar irgendeines anderen Punktes ist.

c) Beweist, dass kein Punkt Endpunkt von mehr als fünf Strecken ist.

d) Beweist, dass sich keine zwei Strecken in ihrem Inneren schneiden.

e) Beweist, dass S keinen geschlossenen Streckenzug enthält.



Beispiele für eine mögliche und eine nicht mögliche Streckenmenge S

Das Beispiel links in der Abbildung zeigt eine Streckenmenge S, die aus der oben beschriebenen Prozedur entstanden ist. Die Streckenmenge rechts dagegen enthält sich schneidende Strecken und einen geschlossenen Streckenzug, sodass sie in keinem Fall auftreten kann.

Lösung

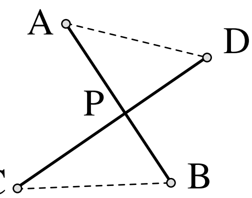
a) Da jeder Punkt einen Nachbar hat, geht von jedem Punkt mindestens eine Strecke aus. Da jede Strecke zwei Punkte verbindet, gibt es mindestens 2019/2 Strecken, also mindestens 1010. Ein Beispiel für eine Menge X mit genau 1010 Strecken in S ist eine Punktmenge, bei der es 1009 Paare von Punkten gibt, die jeweils nah beieinander sind, und bei der die einzelnen Paare sowie der 2019. Punkt jeweils weit entfernt voneinander sind. Bei den 1009 Punktepaaren sind die Punkte gegenseitig Nachbarn und durch eine

Strecke verbunden. Der 2019. Punkt hat einen Nachbarn unter den anderen 2018 Punkten, der durch die 1010. Strecke verbunden ist.

b) Zunächst entfernen wir alle Paare von Punkten P und Q, bei denen Q nur Nachbar von P und keinem weiteren Punkt ist und P nur Nachbar von Q und keinem anderen Punkt ist. Da 2019 ungerade ist, bleibt eine ungerade Anzahl an Punkten über. Ein einzelner Punkt kann dabei nicht über bleiben, da wir dann seinen Nachbarn bereits entfernt hätten, im Widerspruch dazu, dass jener Punkt nur Nachbar seines Nachbars ist.
Wir betrachten unter den verbleibenden Punkten ein Paar P_1 und P_2, die den minimalen Abstand zueinander haben. P_1 ist dann der Nachbar von P_2 und P_2 der Nachbar von P_1. Nach Voraussetzung muss es dann noch einen weiteren Punkt P_3 geben, dessen Nachbar P_1 oder P_2 ist. Da jeder Punkt genau einen Nachbar hat, kann es nur dann keinen Punkt geben, der nicht Nachbar eines anderen Punktes ist, wenn kein Punkt der Nachbar von mehr als einem Punkt ist. Doch dass dies nicht der Fall ist, haben wir gerade gezeigt, folglich muss es einen Punkt geben, der kein Nachbar eines anderen Punktes ist.

c) Wir betrachten einen Punkt P, der mit zwei Punkten P_1 und P_2 durch Strecken verbunden ist. Ist weder P_1 noch P_2 der Nachbar von P, so ist P der Nachbar von P_1 und P_2. Folglich gilt $|\overline{PP_1}| < |\overline{P_1P_2}|$ und $|\overline{PP_2}| < |\overline{P_1P_2}|$, sodass $\overline{P_1P_2}$ die längste Strecke des Dreiecks $\triangle PP_1P_2$ ist. Ist sagen wir P_1 der Nachbar von P, so ist P der Nachbar von P_2. Daher gilt $|\overline{PP_1}| < |\overline{PP_2}|$ und $|\overline{PP_2}| < |\overline{P_1P_2}|$, sodass $\overline{P_1P_2}$ wiederum die längste Strecke des Dreiecks $\triangle PP_1P_2$ ist. Da der längsten Seite eines Dreiecks der größte Winkel gegenüber liegt, gilt damit $|\angle P_1PP_2| > 60°$. Insbesondere können nicht mehr als fünf Strecken an P treffen, da sonst ein Winkel kleiner oder gleich 60° auftreten würde.

d) Angenommen, es gibt ein Paar sich schneidender Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Den Schnittpunkt bezeichnen wir mit P (welcher nicht Teil der 2019 Punkte ist).



Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kreuzen sich

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in der Menge, weil B der Nachbar von A und D der Nachbar von C ist. Dann gilt $|\overline{AB}| < |\overline{AD}|$ und $|\overline{CD}| < |\overline{CB}|$, sodass $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| < |\overline{AD}| + |\overline{CB}|$.
In jedem Dreieck $\triangle XYZ$ gilt die *Dreiecksungleichung*: $|\overline{XY}| < |\overline{XZ}|+|\overline{ZY}|$. Diese wenden wir auf die Dreiecke $\triangle DAP$ und $\triangle CBP$ an und erhalten $|\overline{AD}| < |\overline{PD}| + |\overline{AP}|$ und $|\overline{CB}| < |\overline{CP}| + |\overline{PB}|$. Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben

$$|\overline{AD}|+|\overline{CB}| < |\overline{PD}|+|\overline{AP}|+|\overline{CP}|+|\overline{PB}| = (|\overline{AP}|+|\overline{PB}|)+(|\overline{CP}|+|\overline{PD}|) = |\overline{AB}|+|\overline{CD}|.$$

Insgesamt haben wir die Ungleichungskette $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| < |\overline{AD}| + |\overline{CB}| < |\overline{AB}| + |\overline{CD}|$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine sich in ihrem Inneren schneidende Strecken geben kann.

e) Angenommen, die Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, …, $\overline{P_{k-1}P_k}$ und $\overline{P_kP_1}$ kommen alle in S vor, wobei $k \geq 3$.
Es können nicht sowohl P_2 als auch P_k Nachbar von P_1 sein, ohne Einschränkung sei P_2 nicht der Nachbar von P_1. Damit die Strecke $\overline{P_1P_2}$ auftritt, muss dann aber P_1 der Nachbar

von P_2 sein, sodass $|\overline{P_1P_2}| < |\overline{P_2P_3}|$. Da jeder Punkt genau einen Nachbar hat, folgt aus der Existenz der Strecke $\overline{P_2P_3}$ daher, dass P_2 der Nachbar von P_3 ist und $|\overline{P_2P_3}| < |\overline{P_3P_4}|$. Per Induktion folgt, dass P_j der Nachbar von P_{j-1} ist und damit $|\overline{P_{j-1}P_j}| < |\overline{P_jP_{j+1}}|$. Da aber auch $\overline{P_kP_1}$ eine Strecke ist, ist dann auch P_k der Nachbar von P_1 und $|\overline{P_kP_1}| < |\overline{P_1P_2}|$. Dem entnehmen wir aber die unmögliche Ungleichungskette

$$|\overline{P_1P_2}| < |\overline{P_2P_3}| < |\overline{P_2P_3}| < \ldots < |\overline{P_kP_1}| < |\overline{P_1P_2}|.$$

Der Widerspruch zeigt, dass es keinen geschlossenen Streckenzug in der Menge S geben kann. $\square$